第一讲 函数的性质——奇偶性和对称性

➢ 奇偶性的定义及易错点

	奇函数	偶函数
定义	对定义域内任意x，有 $f(-x)=-f(x)$	对定义域内任意x，有 $f(-x)=f(x)$
定义域	关于原点对称	
图像	关于原点对称	关于y轴对称
典型代表	$y=x$，$y=x^3$， $y=\sin x$	$y=x^2$，$y=\|x\|$， $y=\cos x$

【例1】 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+1}$

【例2】

（1）已知$f(x)$为奇函数，且$f(x)$在$x=0$处有定义，则$f(0)=$__________。

（2）已知$f(x)$为定义在$\boldsymbol{R}$上的偶函数，且$f(x)$在$(-\infty,0)$为单调递减函数，则$f(x)$在$(0,+\infty)$是单调________函数。

【例3】设函数$f(x)\cdot g(x)$的定义域为R，且$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，则下列结论正确的是（　　）。

A. $f(x)\cdot g(x)$是偶函数　　　　B. $|f(x)|\cdot g(x)$是奇函数

C. $f(x)\cdot|g(x)|$是奇函数　　　　D. $|f(x)\cdot g(x)|$是奇函数

【例 4】

（1）已知偶函数 $f(x)$，当 $x \geq 0$ 时，$f(x)=x(x-1)$，求 $f(x)$。

（2）已知奇函数 $f(x)$，当 $x<0$ 时，$f(x)=x-\sqrt[3]{x}+1$，求 $f(x)$。

【例 5】

（1）定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数在 $[0,1)$ 为增函数，则 $f(x)+f(2x-1)<0$ 的解集为____________.

（2）设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(1)=0$，则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为____________.

➢ **函数的对称性**

①$f(x)$与$f(-x)$关于y轴对称

②$f(x)$与$-f(x)$关于x轴对称

③$f(x)$与$-f(-x)$关于$(0,0)$对称

④$f(a+x)=f(b-x)\Leftrightarrow f(x)$关于直线$x=\dfrac{a+b}{2}$对称

⑤$f(a+x)=-f(b-x)\Leftrightarrow f(x)$关于点（$\dfrac{a+b}{2},0$）对称

⑥$f(x)+f(2a-x)=2b$(或$f(a+x)+f(a-x)=2b$)$\Leftrightarrow f(x)$关于点（a,b）对称

【例 6】

（1）若 $f(1+x)=f(1-x)$，则函数 $f(x)$ 关于_________对称。

（2）若 $f(x)=f(2-x)$，则函数 $f(x)$ 关于_________对称。

（3）若 $f(1+x)=-f(1-x)$，则函数 $f(x)$ 关于_________对称。

（4）若 $f(4-x)=-f(x+2)$，则函数 $f(x)$ 关于_________对称。

【例 7】

已知函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-1$对称，函数 $g(x)$ 的图像关于点（-1，2）对称，且 $f(x)+g(x)=2^x+1$，则 $2f(0)-g(-2)$ 等于（　　）

A. $-\dfrac{19}{8}$　　B. $-\dfrac{7}{8}$　　C. $\dfrac{7}{8}$　　D. $\dfrac{19}{8}$

第二讲 解三角形——正弦定理、余弦定理

➢ 正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

➢ 余弦定理：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad \Leftrightarrow \quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \quad \Leftrightarrow \quad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \quad \Leftrightarrow \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

➢ 面积公式：

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

$$=\frac{abc}{4R}(R\text{为外接圆半径})$$

【例 1】

（1）已知ΔABC中，若$a=4, b=4\sqrt{3}, A=30°$，则$B=$__________.

（2）已知ΔABC中，若$a=\sqrt{2}, b=1, B+C=3A$，则$B=$__________.

（3）在ΔABC中，若$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，则$\Delta ABC$是（　　）

A.直角三角形　　B.等边三角形

C.钝角三角形　　D.等腰直角三角形

（4）已知ΔABC中，若$b=4\sqrt{3}$，$c=4$，$B=60°$，求$S_{\Delta ABC}$.

【例 2】已知ΔABC中，$(\sqrt{3}b-c)\cos A=a\cos C$，则$\cos A=$____________.

【例 3】 已知ΔABC中，$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.

（1）求A.

（2）若$a=2$，ΔABC的面积为$\sqrt{3}$，求b, c.

【例 4】已知ΔABC中，$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.

（1）求 A.

（2）求$\sin B+\sin C$的最大值.

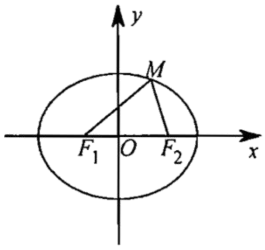
【例 5】已知ΔABC中，$\cos(A-C)+\cos B=1$，$a=2c$，求 C.

➢ **总结：**

已知条件	应用定理	一般解法
AAS（如a,B,C）	正弦定理	由$A+B+C=\pi$，求角A，由正弦定理求出b与c.
SAS	余弦定理 正弦定理	由余弦定理求第三边；由正弦定理求出小边所对的角（此角一定是锐角）；再由$A+B+C=\pi$求出第三个角.
SSS	余弦定理	由余弦定理求出其中两个角；再由$A+B+C=\pi$求出第三个角.
SSA（如a,b,A）	正弦定理 余弦定理	由正弦定理求出角B；由$A+B+C=\pi$，求出角C；再利用正弦定理或余弦定理求c.

第三讲 圆锥曲线——椭圆与抛物线

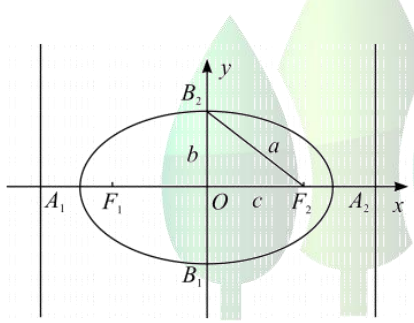
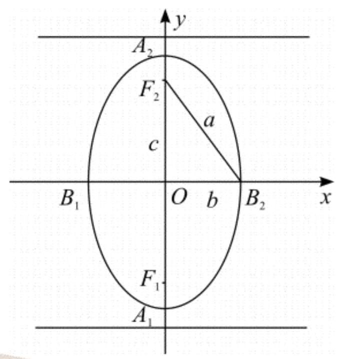
➢ **椭圆的定义和性质**



1.**第一定义：** 平面内与两个定点 F_1、F_2 的距离之和等于常数（$>|F_1F_2|$）的点的轨迹叫作椭圆。

第二定义： 平面内到一个定点的距离和到一条定直线的距离之比等于常数 e（$0<e<1$）的点的轨迹叫作椭圆。

2.椭圆中的关键参数及关系

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的中心在原点，焦点在 x 轴上	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的中心在原点，焦点在 y 轴上
图像		
顶点	$A_1(-a,0),A_2(a,0)$ $B_1(0,-b),B_2(0,b)$	$A_1(0,-a),A_2(0,a)$ $B_1(-b,0),B_2(b,0)$
对称轴	x 轴、y 轴，长轴长 $2a$，短轴长 $2b$	x 轴、y 轴，长轴长 $2a$，短轴长 $2b$
焦点	焦点 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$ 在 x 轴上	焦点 $F_1(0,-c)$、$F_2(0,c)$ 在 y 轴上
焦距	$\|F_1F_2\|=2c(c>0)$ $c^2=a^2-b^2$	$\|F_1F_2\|=2c(c>0)$ $c^2=a^2-b^2$
离心率	$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$	$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$
准线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$y=\pm\frac{a^2}{c}$

3.小提示与易错点

- 考试中所见到的椭圆都是指中心在原点，对称轴在坐标轴上的椭圆
- 在做椭圆问题的时候，一定要判断清楚焦点（长轴）在哪个坐标轴上
- 注意长轴与半长轴、焦距与半焦距的区别
- 单看椭圆比较简单，要注意和双曲线进行对比

【例 1】已知椭圆的中心在原点且过点 P(3, 2)，焦点在坐标轴上，长轴长是短轴长的 3 倍，求该椭圆的方程。

【例 2】椭圆的中心在原点，焦距为 4，一条准线为 $x=-4$，则该椭圆的方程为？

【例 3】 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右顶点分别是 A、B，左、右焦点分别为 F_1、F_2，若 $|AF_1|$、$|F_1F_2|$、$|F_1B|$ 成等比数列，则此椭圆的离心率为__________.

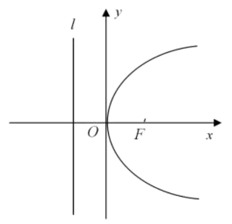
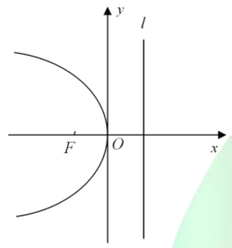
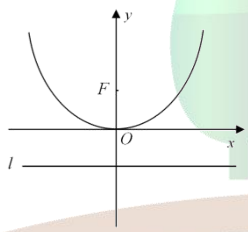
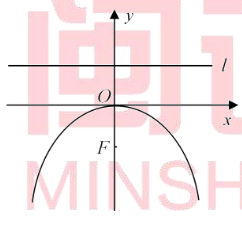
【例 4】已知 F_1、F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A、B 两点，若 $|F_2A|+|F_2B|=12$，则 $|AB|=$___________.

➢ **总结：**

- 椭圆中的 a,b,c,e 及其之间的关系，准线方程
- 对于概念的考察重点在于对定义的理解
- 椭圆大题的处理方法适用大题的一般技巧，会在课程中进行讲解

➢ 抛物线的定义和性质

1.定义：平面内与一个定点 F 和一条定直线 l（l 不过 F）的距离相等的点的轨迹叫作抛物线。

标准方程	图形	对称轴	焦点坐标	准线方程	离心率
$y^2=2px$ $(p>0)$		x 轴	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$x=-\frac{p}{2}$	$e=1$
$y^2=-2px$ $(p>0)$			$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$x=\frac{p}{2}$	
$x^2=2py$ $(p>0)$		y 轴	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$y=-\frac{p}{2}$	
$x^2=-2py$ $(p>0)$			$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$	$y=\frac{p}{2}$	

注： p 表示焦点到准线的距离。

2.小提示

- 抛物线部分相对椭圆和双曲线比较简单，只有一个参数，且离心率 e 也是固定数值 1
- $2p,p,\frac{p}{2}$ 三个量要分清楚
- 抛物线大部分的选择、填空题可以通过定义解决

【例 1】设抛物线的顶点在原点，准线方程为 $x=-2$，则抛物线的方程为_______________。

【例 2】已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点 O,并且经过点 $M(2,y_0)$，若点 M 到该抛物线焦点的距离为 3，则 $|OM|=$__________。

【例 3】设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点 F,准线为 l，P 是抛物线上一点，$PA\perp l$，A 为垂足。若直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$，则 $|PF|=$___________。

【例 4】已知 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的一个动点，则点 P 到点 $Q(2,1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点距离之和取最小值时，点 P 的坐标为____________。

- **总结**

- 抛物线问题的考察以焦点弦问题为主——用定义解决问题
- 抛物线大题的处理方法适用大题的一般技巧，会在课程中进行讲解

第四讲 极限

一、定义

- 当$x \to x_0$时，$f(x)$无限趋于某个常数A，则称A为$f(x)$在点x_0处的极限，记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$。

二、左(右)极限

- 左极限：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$；右极限：$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$
- 极限存在的条件：左极限=右极限
- 极限的存在与否以及极限的大小都与函数在该点的情况（是否有定义、函数值）无关。

三、极限的运算法则

若$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，那么 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$

$$\lim\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{A}{B}\ (B \neq 0)$$

$$\lim cf(x) = c \cdot A\ (c\text{ 为常数})$$

$$\lim[f(x)]^n = A^n\ (n\text{ 为正整数})$$

四、极限的计算

1.代入法

$\lim\limits_{x \to 1}(2x-1) =$

2.约公因子法

①$\lim\limits_{x \to 1}\frac{x-1}{x^3-1} =$　　　　②$\lim\limits_{x \to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3} =$

3.最高次幂法

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n\text{时}\\ 0, & m<n\text{时}\\ \infty, & m>n\text{时}\end{cases}$$

①$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=$ ②$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^4+6x^3-x^2+3}{2x^4-x^2-9x}=$

4.两个重要极限

- ➢ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
- ➢ $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

①$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=$ ②$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$

③$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=$ ④$\lim\limits_{x\to0}(1-3\sin x)^{\frac{2}{x}}=$

5.等价无穷小

当$x\to0$的常用等价无穷小量有：

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$$
$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$$
$$a^x-1\sim x\ln a$$
$$\left[(1+x)^a-1\right]\sim ax$$

- ➢ 前提：必须是当$x\to0$时的因式才能使用，整个因式替换。

①$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin3x}{e^x-1}=$ ②$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=$

③$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3}=$

④$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x\cdot(x+\sin^2 x)}{x^2}=$

6.洛必达法则

$f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限都是 0 或都是∞，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都可导，$g(x)$ 的导数不为 0，

则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$。

①$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x-1}=$

②$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=$

➢ **总结**

- 先看能否直接用代入法（分母非零）;
- 观察是否符合两个重要极限或最高次幂法的应用形式;
- 若为分式，且分母为 0，则先尝试约公因子;
- 观察能否进行等价无穷小替换（$x\to 0$ 且存在可替换因式）;
- 应用洛必达法则 $(\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型)。

【拓展延伸】

1.$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=$

2.$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+3^n}{2^n+3^n}=$

3.$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x^2-4}=$